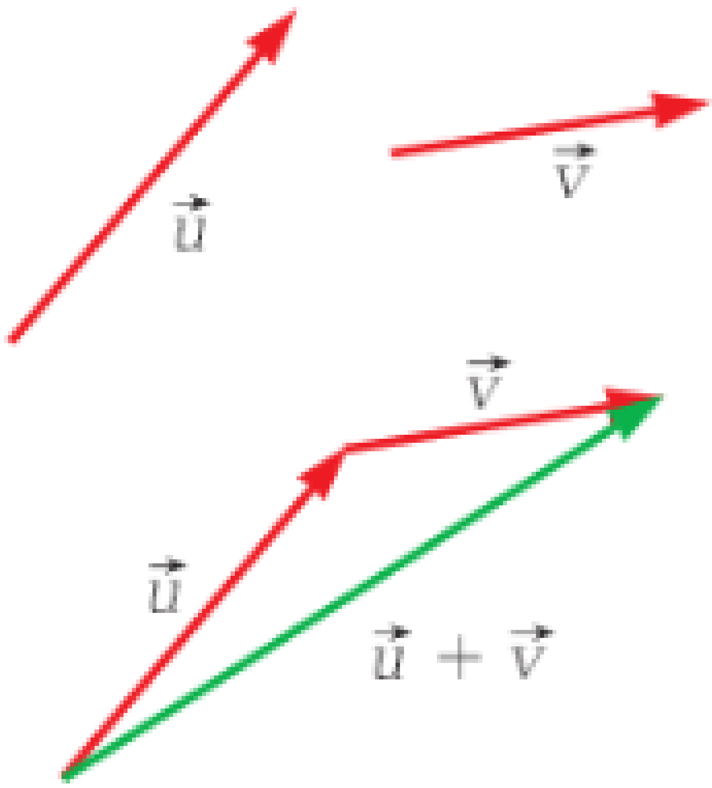
2 Operacions amb vectors

2.1. Suma i resta de vectors

Per **sumar** gràficament dos **vectors**, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, n'agafem un, $\vec{u}$, i amb l'origen al seu extrem dibuixem el vector $\vec{v}$. La suma és un altre vector que té d'origen l'origen de $\vec{u}$, i d'extrem, l'extrem de $\vec{v}$. El vector que en resulta es representa $\vec{u} + \vec{v}$.

Donats els vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, les coordenades del **vector suma** es calculen sumant coordenada a coordenada.

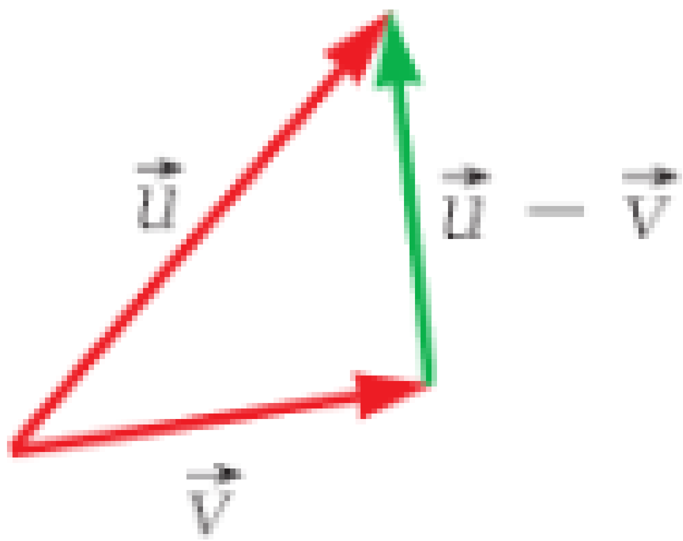
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$



Per **restar** gràficament dos **vectors**, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, agafem els dos vectors amb el mateix origen. La diferència és un altre vector que té d'origen l'extrem de $\vec{v}$, i que té d'extrem l'extrem de $\vec{u}$. El vector que en resulta es representa $\vec{u} - \vec{v}$.

Donats els vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, les coordenades del **vector diferència** es calculen restant coordenada a coordenada.

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

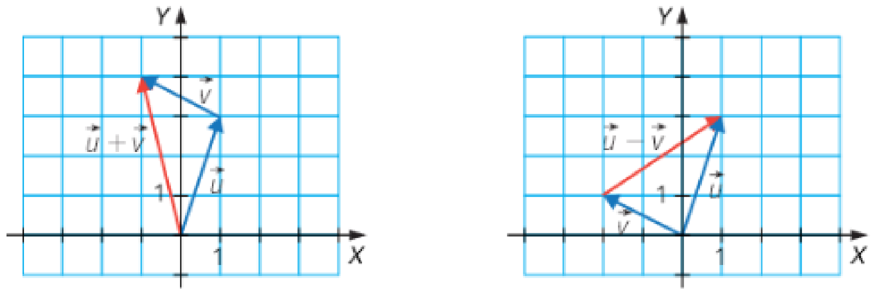


EXEMPLE

4. Considera els vectors $\vec{u} = (1, 3)$ i $\vec{v} = (-2, 1)$, i resol gràficament i amb coordenades aquestes operacions:

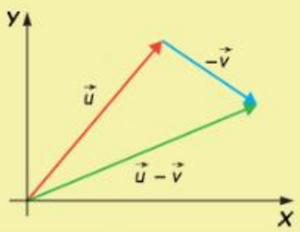
a) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 3) + (-2, 1) = (-1, 4)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (1, 3) - (-2, 1) = (3, 2)$



L'**oposat** d'un vector $\vec{v}$ és un vector $-\vec{v}$ amb direcció i mòdul iguals, però de sentit contrari.

Restar dos vectors, $\vec{u} - \vec{v}$, és el mateix que sumar a $\vec{u}$ l'oposat de $\vec{v}$.



Deures - Exercicis:

Ex 7,8,9 (pàg. 160)

7 **PRACTICA.** Determina gràficament i calcula les coordenades de la suma d'aquests vectors.

a) $\vec{u} = (-7, 1)$ i $\vec{v} = (0, -4)$

b) $\vec{u} = (3, 2)$ i $\vec{v} = (2, -5)$

c) $\vec{u} = (-4, 3)$ i $\vec{v} = (1, 2)$

d) $\vec{u} = (6, -5)$ i $\vec{v} = (8, 7)$

8 **APLICA.** Donats aquests punts, calcula.

$A(0, 0)$ $\quad B(-1, 3)$ $\quad C(-2, -2)$ $\quad D(1, -3)$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

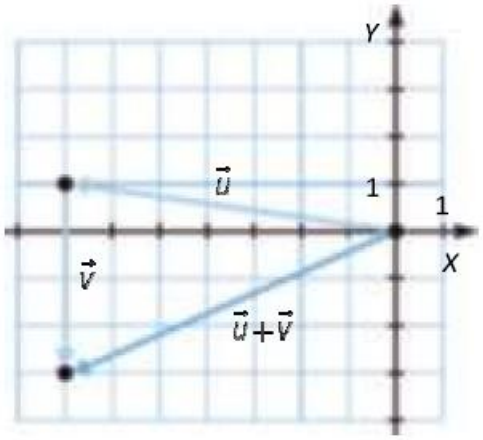
e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$

f) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$

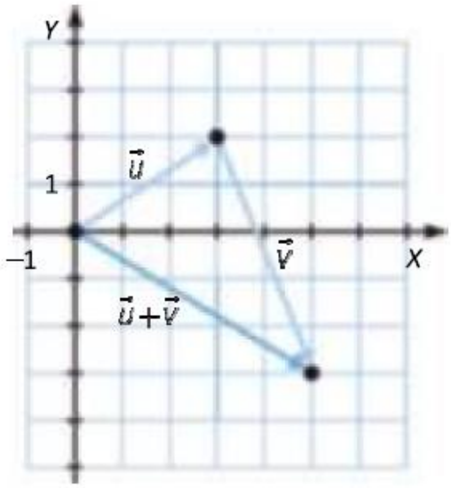
9 **REFLEXIONA.** Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, quines són les coordenades de $-\vec{u}$? Calcula $\vec{u} + (-\vec{u})$.

7. Página 160

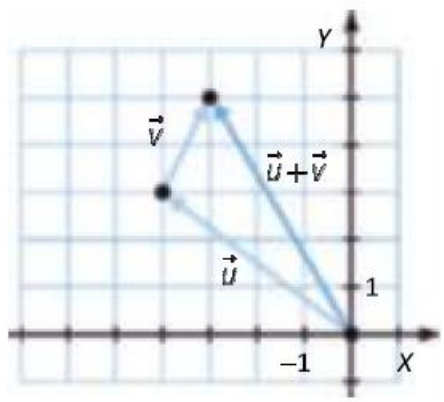
a) $\vec{u}+\vec{v}=(-7,1)+(0,-4)=(-7,-3)$



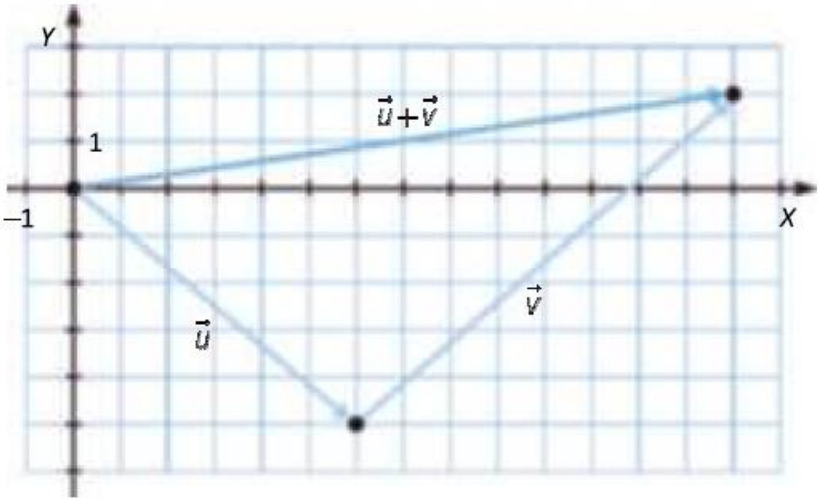
b) $\vec{u}+\vec{v}=(3,2)+(2,-5)=(5,-3)$



c) $\vec{u}+\vec{v}=(-4,3)+(1,2)=(-3,5)$



d) $\vec{u}+\vec{v}=(6,-5)+(8,7)=(14,2)$



8. Página 160

$\overrightarrow{AB}=(-1,3)$ $\overrightarrow{CD}=(3,-1)$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(2,2)$

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=(-4,4)$

c) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=(4,-4)$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=(-2,6)$

e) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=(0,0)$

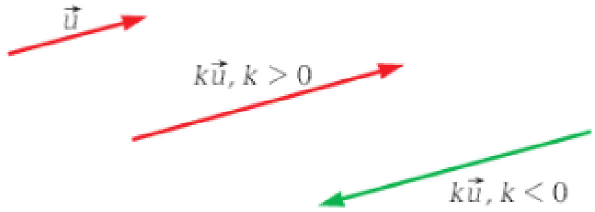
f) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}=(2,2)$

9. Página 160

$\vec{u}=(u_1,u_2)\rightarrow-\vec{u}=(-u_1,-u_2)$ $\vec{u}+(-\vec{u})=(0,0)$

2.2. Multiplicació d'un vector per un nombre

Per **multiplicar un vector $\vec{u}$ per un nombre** real k es multiplica el mòdul del vector pel nombre real i es manté la direcció del vector. El sentit serà el mateix si k és positiu, i contrari si k és negatiu.



En coordenades, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, el **producte d'un nombre real k per un vector $\vec{u}$** es calcula multiplicant cada coordenada pel nombre k.

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

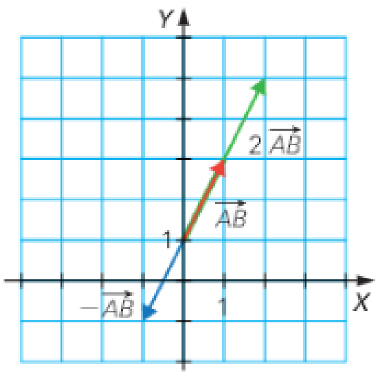
EXEMPLE

5. Donats els punts $A(0, 1)$ i $B(1, 3)$, calcula de manera gràfica i analítica el producte del vector $\overrightarrow{AB}$ pels nombres -1 i 2.

$\overrightarrow{AB} = (1 - 0, 3 - 1) = (1, 2)$

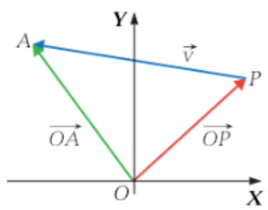
$-1 \cdot \overrightarrow{AB} = (-1 \cdot 1, -1 \cdot 2) = (-1, -2)$

$2 \cdot \overrightarrow{AB} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2, 4)$



2.3. Vector de posició d'un punt

Qualsevol punt del pla, $P(a, b)$, queda determinat per un vector de posició $\overrightarrow{OP}$, que té les mateixes coordenades que el punt, en què O és l'origen de coordenades.



La suma d'un vector de posició $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ i un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dóna un vector de posició en què les coordenades coincideixen amb les d'un punt A que resulta de traslladar el punt P mitjançant el vector $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \vec{v} = (a, b) + (v_1, v_2) = (a + v_1, b + v_2)$$

Deures - Exercicis:

Ex 10,11,12 (pàg. 161)

10 **PRACTICA.** Fes aquestes operacions amb vectors.

a) $2 \cdot (-1, 3)$

b) $-1 \cdot (3, -1)$

c) $3 \cdot (2, 5)$

d) $2 \cdot (4, 10) + 3 \cdot (-2, 7)$

e) $-1 \cdot (2, -3) - 3 \cdot (1, 1)$

f) $5 \cdot (-3, 4) + 3 \cdot (8, 4)$

g) $6 \cdot (1, -1) - 2 \cdot (2, 3)$

11 **APLICA.** Opera i representa aquests vectors.

a) $2\vec{v}$ en què $\vec{v} = (-1, 5)$

b) $3\vec{v} + 2\vec{u}$ en què $\vec{u} = (1, -2)$ i $\vec{v} = (2, 5)$

c) $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ en què $\vec{u} = (3, 6)$ i $\vec{v} = (1, 4)$

12 **REFLEXIONA.** Escriu un vector, $\vec{u}$, amb la mateixa direcció, sentit contrari i mòdul la meitat del mòdul de $\vec{v} = (2, 6)$. Determina quina operació hem d'aplicar a $\vec{u}$ per tornar a obtenir $\vec{v}$?

10. Página 161

a) $2 \cdot (1, 2) = (2, 4)$

b) $-1 \cdot (3, -1) = (-3, 1)$

c) $3 \cdot (2, 5) = (6, 15)$

d) $2 \cdot (4, 10) + 3 \cdot (-2, 7) = (8, 20) + (-6, 21) = (2, 41)$

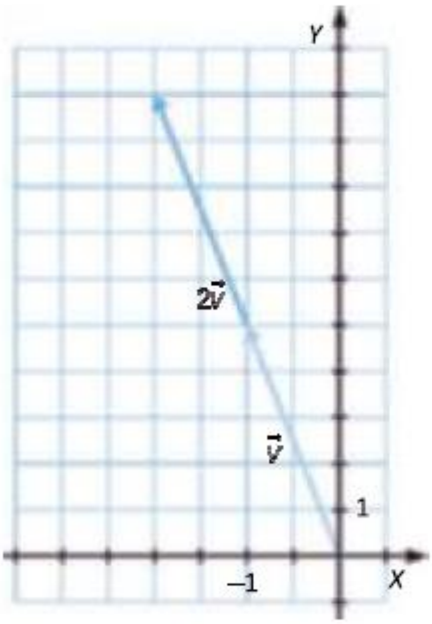
e) $-1 \cdot (2, -3) - 3 \cdot (1, 1) = (-2, 3) + (-3, -3) = (-5, 0)$

f) $5 \cdot (-3, 4) + 3 \cdot (8, 4) = (-15, 20) + (24, 12) = (9, 32)$

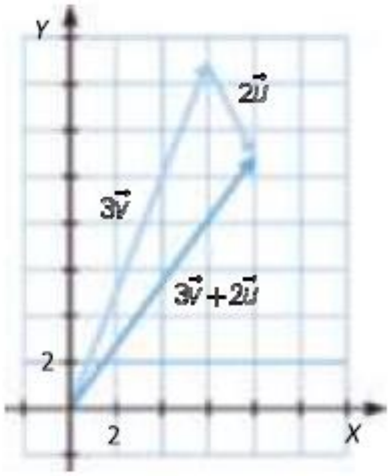
g) $6 \cdot (1, -1) - 2 \cdot (2, 3) = (6, -6) + (-4, -6) = (2, -12)$

11. Página 161

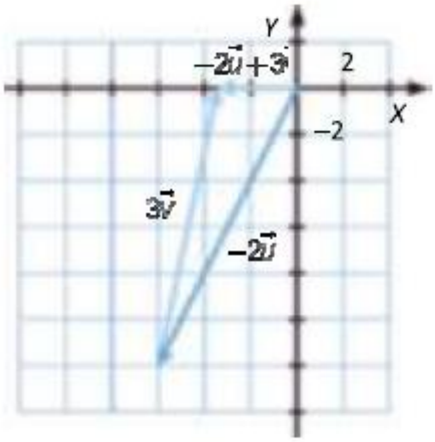
a) $2\vec{v} = (-2, 10)$



b) $3\vec{v}+2\vec{u}=(6,15)+(2,-4)=(8,11)$



c) $-2\vec{u}+3\vec{v}=(-6,-12)+(3,12)=(-3,0)$



12. Página 161

$\vec{v}=(2,6)\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$

Un vector con la misma dirección, sentido contrario y módulo la mitad sería:

$\vec{u}=(-1,3)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

Para volver a obtener $\vec{v}$ a partir de $\vec{u}$ tenemos que multiplicarlo por –2, es decir, $\vec{v}=-2\vec{u}$.