7 Equació general de la recta

L'**equació general** o **implícita** de la recta té la forma:

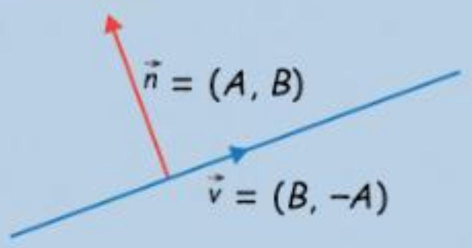
$$Ax + By + C = 0$$

Amb A, B i C com a nombres reals, i s'obté, a partir de les equacions que hem vist, agrupant tots els termes en un membre.

Aïllem y de l'equació i en resulta: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$

Si comparem aquesta equació amb l'equació explícita, deduïm que el pendent de la recta és $m = \dfrac{-A}{B}$, l'ordenada a l'origen és $n = \dfrac{-C}{B}$ i un vector director és $\vec{v} = (B, -A)$.

Si $Ax + By + C = 0$ és l'equació general d'una recta, aleshores $\vec{n} = (A, B)$ és un vector perpendicular al vector director de la recta.



Aquest vector s'anomena vector normal de la recta.

EXEMPLES

10. Calcula l'equació general de la recta que passa per $P(-1, 0)$ i $Q(2, 1)$.

El vector director de la recta és:

$$\overrightarrow{PQ} = (2-(-1), 1-0) = (3, 1) = (B, -A)$$

L'equació de la recta té la forma:

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-1, B=3} -x + 3y + C = 0$$

Ho substituïm en un dels punts de la recta per obtenir el valor de C.

$$P(-1, 0) \rightarrow -x + 3y + C = 0 \xrightarrow{x=-1, y=0} 1 + C = 0 \rightarrow C = -1$$

L'equació general de la recta és: $-x + 3y - 1 = 0$

11. Troba l'equació general d'una recta sabent que el pendent és $m = 2$ i que passa pel punt $P(2, 0)$. Quin n'és el vector director?

Com que coneixem el pendent i un punt de la recta, escrivim l'equació punt-pendent:

$$y - 0 = 2 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 2x - 4$$

Agrupem tots els termes en un membre i obtenim l'equació general.

$$y = 2x - 4 \rightarrow 2x - y - 4 = 0 \leftarrow \text{Equació general}$$

El vector director és: $(B, -A) = (-1, -2)$.

Deures - Exercicis:

Ex 25,26,27 (pàg. 166)

25 **PRACTICA.** Calcula l'equació general de la recta que passa pels punts $P(-2, 3)$ i $Q(4, 2)$.

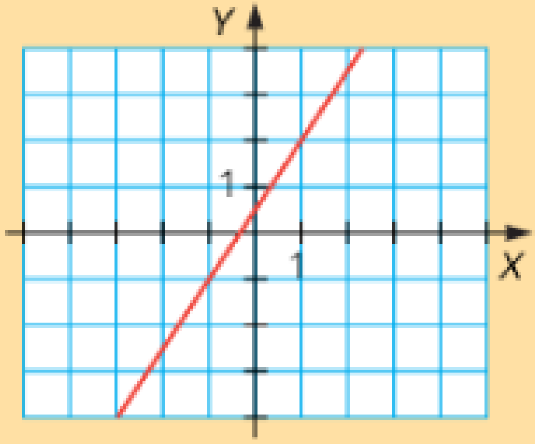
26 **APLICA.** Donada la recta d'equació $x - 4y + 5 = 0$, troba'n:

a) El vector director

b) Un punt de la recta

c) Un vector perpendicular

27 **REFLEXIONA.** Escriu l'equació general de la recta que hi ha representada en aquesta gràfica.



25. Página 166

$$\overrightarrow{PQ} = (6, -1) = (B, -A) \rightarrow Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=1,\, B=6} x + 6y + C = 0$$

$$\xrightarrow{x=-2,\, y=3} -2 + 18 + C = 0 \rightarrow C = -16 \rightarrow x + 6y - 16 = 0$$

26. Página 166

a) Vector director: $m = \dfrac{-1}{-4} \rightarrow \vec{v} = (-4, -1)$

b) Punto de la recta: $y = 0 \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)$

c) Vector perpendicular: $(1, -4)$ ya que $(-4) \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) = 0$

27. Página 166

La recta pasa por $A(-1, -1)$ y por $B(1, 2)$ entonces:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 3) = (B, -A) \rightarrow Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-3,\, B=2} -3x + 2y + C = 0$$

$$\xrightarrow{x=-1,\, y=-1} 3 - 2 + C = 0 \rightarrow C = -1 \rightarrow -3x + 2y - 1 = 0$$

SABER FER

Calcular les equacions d'una recta que passa per dos punts

Calcula totes les equacions de la recta que passa per $A(0, 1)$ i $B(2, 4)$.

Passos que cal seguir

1. Trobem el vector director i, amb un dels punts de l'enunciat, escrivim l'equació vectorial.

El vector director és: $\overrightarrow{AB} = (2 - 0, 4 - 1) = (2, 3)$

Escrivim l'equació vectorial amb un dels punts, com, per exemple, $A(0, 1)$.

Equació vectorial: $(x, y) = (0, 1) + t \cdot (2, 3)$

2. Escrivim l'equació paramètrica igualant coordenada a coordenada.

$\begin{cases} x = 0 + t \cdot 2 \\ y = 1 + t \cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ ← **Equació paramètrica**

3. Aïllem la t i igualem els resultats per obtenir l'equació en forma contínua.

Es pot expressar en la forma contínua perquè cap de les coordenades del vector director és 0.

$\begin{cases} t = \dfrac{x - 0}{2} \\ t = \dfrac{y - 1}{3} \end{cases} \rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{3}$ ← **Equació contínua**

Quan alguna coordenada del punt és 0, no cal posar-la.

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{3}$ → Passa per (0, 1).

4. Passem el denominador del segon membre al primer, multiplicant, i obtenim l'equació punt-pendent.

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{3} \rightarrow \dfrac{3x}{2} = y - 1 \rightarrow y - 1 = \dfrac{3}{2}x$

Equació punt-pendent: $y - 1 = \dfrac{3}{2}x$

5. Aïllem la y per trobar l'equació explícita.

$y - 1 = \dfrac{3}{2}x \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x + 1$ ← **Equació explícita**

6. Agrupem tots els termes en un membre i obtenim l'equació general de la recta.

$y = \dfrac{3}{2}x + 1 \rightarrow -\dfrac{3}{2}x + y - 1 = 0 \rightarrow -3x + 2y - 2 = 0$

Equació general: $-3x + 2y - 2 = 0$

Deures - Exercicis:

Ex 28,29,30,31 (pàg. 167)

Deures - Exercicis:

Ex 28,29,30,31 (pàg. 167)

28 Escriu totes les equacions de la recta que passen pels punts següents.

a) $P(0, 0)$ i $Q(-3, 4)$

b) $P(0, 1)$ i $Q(2, 0)$

c) $P(-7, 4)$ i $Q(1, 2)$

d) $P(5, 1)$ i $Q(0, 4)$

e) $P(3, -2)$ i $Q(1, 3)$

f) $P(-2, 0)$ i $Q(0, -1)$

29 Determina totes les equacions de la recta que passa pel punt $P(2, 1)$ i que té de vector director $\vec{v} = (-4, -3)$.

30 Donada la recta d'equació $2x + y - 3 = 0$ escriu-ne:

a) L'equació explícita

b) L'equació contínua

c) L'equació vectorial

31 Calcula totes les equacions d'aquestes rectes.

a) El pendent és -1 i passa pel punt $(0, -2)$.

b) El pendent és 2 i l'ordenada a l'origen és -3.

c) Passa pel punt $P(2, 1)$ i és perpendicular a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

d) Passa pel punt $P(-1, 0)$ i és paral·lela a la recta $y - 2 = 3(x - 2)$.

28. **Página 167**

a) $P(0,0)$ y $Q(-3,4) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-3,4)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (0,0) + t(-3,4)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = -\dfrac{x}{3} \\ t = \dfrac{y}{4} \end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4}$

Ecuación punto-pendiente: $y = -\dfrac{4}{3}x$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{4}{3}x$

Ecuación general: $3y = -4x \rightarrow 4x + 3y = 0$

b) $P(0,1)$ y $Q(2,0) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2,-1)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (0,1) + t(2,-1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1 - t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x}{2} \\ t = \dfrac{y-1}{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{1}{2}x$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

Ecuación general: $2y = -x + 2 \rightarrow x + 2y - 2 = 0$

c) $P(-7,4)$ y $Q(1,2) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (8,-2)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (1,2) + t(8,-2)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 8t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-1}{8} \\ t = \dfrac{y-2}{-2} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-2}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 2 = \dfrac{x-1}{-4} \rightarrow y - 2 = -\dfrac{1}{4}(x-1)$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$

Ecuación general: $4y = -x + 9 \rightarrow x + 4y - 9 = 0$

d) $P(5,1)$ y $Q(0,4) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-5,3)$

Ecuación vectorial: $(x,y) = (0,4) + t(-5,3)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = -5t \\ y = 4 + 3t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = -\dfrac{x}{5} \\ t = \dfrac{y-4}{3} \end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-4}{3}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 4 = -\dfrac{3}{5}x$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{3}{5}x + 4$

Ecuación general: $5y = -3x + 20 \rightarrow 3x + 5y - 20 = 0$

e) $P(3,-2)$ y $Q(1,3) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-2,5)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(1,3)+t(-2,5)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=3+5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x-1}{-2} \\ t=\dfrac{y-3}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-3}{5}$

Ecuación punto-pendiente: $y-3=5\left(\dfrac{x-1}{-2}\right) \rightarrow y-3=-\dfrac{5}{2}(x-1)$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{11}{2}$

Ecuación general: $2y=-5x+11 \rightarrow 5x+2y-11=0$

f) $P(-2,0)$ y $Q(0,-1) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2,-1)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(-2,0)+t(2,-1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x+2}{2} \\ t=\dfrac{y}{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $y=-\left(\dfrac{x+2}{2}\right) \rightarrow y=-\dfrac{1}{2}(x+2)$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{1}{2}x-1$

Ecuación general: $2y=-x-2 \rightarrow x+2y+2=0$

29. Página 167

Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t(-4, -3)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-2}{-4} \\ t = \dfrac{y-1}{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y-1}{-3}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -3\left(\dfrac{x-2}{-4}\right) \rightarrow y - 1 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

Ecuación general: $4y = 3x - 2 \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

30. Página 167

a) La ecuación explícita: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = -2x + 3$

b) La ecuación continua: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow \dfrac{y-3}{-2} = x$

c) La ecuación vectorial: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 3) + t \cdot (1, -2)$

31. Página 167

a) Su pendiente es –1 y pasa por el punto (0, –2).

Ecuación punto-pendiente $y+2=-1\cdot(x-0)\rightarrow y+2=-x$

Ecuación explícita: $y=-x-2$

Ecuación general: $x+y+2=0$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,-2)+t(1,-1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-2-t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $x=\dfrac{y+2}{-1}$

b) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es –3.

Ecuación explícita: $y=2x-3$

Ecuación punto-pendiente: $y+3=2x$

Ecuación general: $-2x+y+3=0$

Ecuación continua: $x=\dfrac{y+3}{2}$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-3+2t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,-3)+t(1,2)$

c) Pasa por el punto $P(2, 1)$ y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

El vector $(-2, 3)$ es el director de $3x-2y+1=0$, por tanto, el vector director de la nueva recta es $(3, -2)$.

Ecuación vectorial: $(x, y)=(2, 1)+t(3, -2)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=2+3t \\ y=1-2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x-2}{3} \\ t=\dfrac{y-1}{-2} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y-1=-2\left(\dfrac{x-2}{3}\right) \rightarrow y-1=-\dfrac{2}{3}(x-2)$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}$

Ecuación general: $3y=-2x+7 \rightarrow 2x+3y-7=0$

d) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y es paralela a la recta $y - 2 = 3(x - 2)$.

El vector $(1, 3)$ es el director de $y-2=3(x-2)$, por tanto, un vector director de la nueva recta es $(2, 6)$.

Ecuación vectorial: $(x, y)=(-1, 0)+t(2, 6)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=6t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x+1}{2} \\ t=\dfrac{y}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{6}$

Ecuación punto-pendiente: $y=6\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \rightarrow y=3(x+1)$

Ecuación explícita: $y=3x+3$

Ecuación general: $-3x+y-3=0$