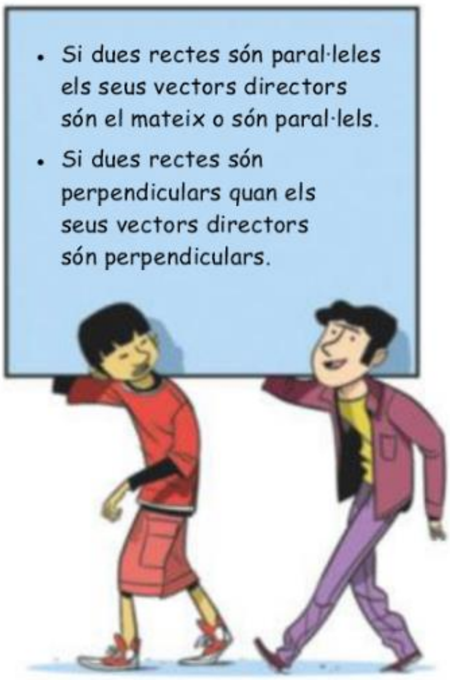
8 Posició relativa de dues rectes en el pla

En el pla, dues rectes poden ser paral·leles, coincidents o secants.

- **Paral·leles:** la direcció és la mateixa i no tenen punts en comú.
- **Coincidents:** tenen la mateixa direcció i tots els seus punts són comuns.
- **Secants:** les direccions són diferents i tenen un sol punt en comú, que és el punt de tall de les dues rectes.

Si considerem la recta r, de vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$, i pendent m, i la recta s, de vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i pendent m', es compleix que:

Posicions	Vectors directors	Pendents	Equació general
Paral·leles	$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$	$m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidents	$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$	$m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secants	$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{v_2}{v_1}$	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$



EXEMPLE

12. Estudia la posició relativa dels parells de rectes següents:

a) $\begin{cases} r\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} & \rightarrow \text{Pendent} = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{1}{2} \\ s\colon y = -2x - 1 & \rightarrow \text{Pendent} = -2 \end{cases}$

Els pendents són diferents, $\dfrac{1}{2} \neq -2$, per tant, les rectes són secants.

b) $\begin{cases} r\colon (x, y) = (0, 1) + t \cdot (1, 1) & \rightarrow \text{Vector director } \vec{u} = (1, 1) \\ s\colon 2x - 2y + 1 = 0 & \rightarrow \text{Vector director } \vec{v} = (B, -A) = (-2, -2) \end{cases}$

Els vectors directors són proporcionals: $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_2}{v_1} \rightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2}$.

Un punt de r és $P(0, 1)$. Mirem si pertany també a la recta s.

$$s\colon 2x - 2y + 1 = 0 \xrightarrow{P(0,\,1)} 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \neq 0$$

Aleshores, el punt P no pertany a s; així doncs, les rectes són paral·leles.

Deures - Exercicis:

Ex 32,33,34 (pàg. 168)

32 **PRACTICA.** Estudia la posició relativa d'aquests parells de rectes.

a) $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x, y) = (2, 3) + t \cdot (1, 4) \\ \dfrac{x-3}{-8} = \dfrac{y-1}{-2} \end{cases}$

33 **APLICA.** Calcula el pendent d'una recta perpendicular a la recta $y = 2x + 3$.

34 **REFLEXIONA.** Determina quin valor ha de tenir A perquè les rectes r: $y = Ax + 6$ i s: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{4}$ siguin paral·leles.

32. Página 168

a) $\left.\begin{array}{l} y = -2x + 1 \rightarrow \text{Pendiente} = -2 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \rightarrow \text{Pendiente} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$ Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

b) $\left.\begin{array}{l} (x, y) = (2, 3) + t(1, 4) \rightarrow \text{Pendiente} = 4 \\ \dfrac{x-3}{-8} = \dfrac{y-1}{-2} \qquad \rightarrow \text{Pendiente} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow$ Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

33. Página 168

El vector (1, 2) es director de la recta $y = 2x + 3$. Por tanto, un vector perpendicular puede ser (–2, 1), es decir, la recta perpendicular tiene pendiente $m = -\dfrac{1}{2}$.

34. Página 168

El vector director de s es (2, 4) y su pendiente es $m = 2$. Por tanto, las pendientes son iguales cuando $A = 2$. Pero en este caso son coincidentes ya que $\dfrac{-2}{4} = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-6}{12}$.

Calcular rectes paral·leles i perpendiculars a una de donada

Donada la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2}$**, calcula:**

a) Una recta paralela a r **que passi per** $P(0, 1)$**.**

b) Una recta perpendicular a r **que passi per** $Q(-1, 1)$**.**

- Un vector paral·lel a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ és $\vec{v'} = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$, en què k és qualsevol nombre diferent de 0.
- Un vector perpendicular a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ és $\vec{v'} = (-v_2, v_1)$.

Passos que cal seguir

1. Determinem el vector director de la recta.

$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} \rightarrow$ Vector director $\vec{v_r} = (3, -2)$

2. Escrivim l'equació de la recta.

- Recta paral·lela a r:
  - Té com a vector director un vector paral·lel al vector director de r.
  - Passa per un punt que no pertany a r.

a) Un vector paral·lel a $\vec{v_r} = (3, -2)$ és:

$\vec{v_s} = (2 \cdot 3, 2 \cdot (-2)) = (6, -4)$

El punt $P(0, 1)$ no pertany a r:

$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} \xrightarrow{P(0,1)} \frac{0+2}{3} \neq \frac{1}{-2} \rightarrow P \notin r$

L'equació vectorial d'una recta paral·lela és:

$(x, y) = (0, 1) + t \cdot (6, -4)$

- Recta perpendicular a r:
  - Té com a vector director un vector perpendicular al vector director de r.

b) Un vector perpendicular a $\vec{v_r} = (3, -2)$ és:

$\vec{v_s} = (-v_2, v_1) = (-(-2), 3) = (2, 3)$

Passa per $Q(-1, 1)$. L'equació vectorial d'una recta perpendicular és:

$(x, y) = (-1, 1) + t \cdot (2, 3)$

Deures - Exercicis:

Ex 35,36,37,38,39,40,41 (pàg. 169

Deures - Exercicis:

Ex 35,36,37,38,39,40,41 (pàg. 169)

35 Calcula les equacions d'una recta perpendicular i una de paral·lela a les rectes següents que passin pel punt $P(3, -1)$.

a) $3x + y - 1 = 0$

b) $5x + 2y - 4 = 0$

c) $-x + y + 2 = 0$

d) $-2x + 2y - 1 = 0$

e) $4x + 3y + 2 = 0$

36 Troba l'equació d'una recta paral·lela a $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{7}$ que passi per $(0, 0)$.

37 Determina l'equació vectorial d'una recta perpendicular a $x + y - 5 = 0$ que passi pel punt $P(0, 4)$ i representa-la.

38 Troba una recta paral·lela a la recta d'equació $(x, y) = (2, 0) + t \cdot (-1, 4)$, que passi pel punt $(1, 1)$.

39 Considera l'equació $y = \frac{3}{2}x + 1$.

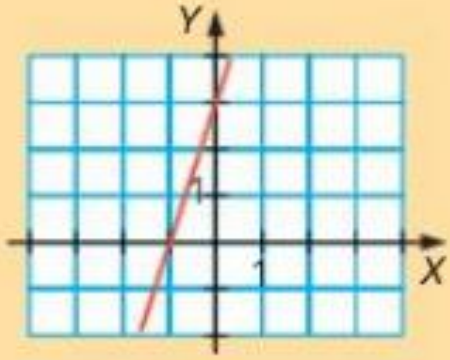
a) Troba una recta paral·lela que passi pel punt $P(0, 2)$.

b) Determina l'equació punt-pendent d'una recta perpendicular que passi per l'origen.

c) Calcula l'equació en forma contínua d'una recta paral·lela que passi pel punt $Q(0, 3)$.

40 Donada la recta $y = 7$, calcula l'equació d'una recta paral·lela que passi pel punt (1, 2).

41 Determina l'equació de la recta r.



Escriu i representa una recta:

a) Paral·lela a r que passi per l'origen.

b) Perpendicular a r que passi pel punt $A(0, -1)$.

35. **Página 169**

a) $3x + y - 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (1, -3)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'} = (3, 1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (3, 1)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $3x + y - 1 = 0 \xrightarrow{x=3,\, y=-1} 9 - 1 - 1 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (1, -3)$.

b) $5x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \vec{v} = (2, -5)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'} = (5, 2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (5, 2)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $5x + 2y - 4 = 0 \xrightarrow{x=3,\, y=-1} 15 - 2 - 4 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (2, -5)$.

c) $-x + y + 2 = 0 \rightarrow \vec{v} = (1, 1)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'} = (1, -1)$ y, por tanto, la recta perpendicular pasa que por el punto $P(3, -1)$ es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (1, -1)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $-x + y + 2 = 0 \xrightarrow{x=3,\, y=-1} -3 - 1 + 2 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (1, 1)$.

d) $-2x + 2y - 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (2, 2)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'} = (2, -2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (2, -2)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $-2x + 2y - 1 = 0 \xrightarrow{x=3,\, y=-1} -6 - 2 - 1 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (2, 2)$.

e) $4x + 3y + 2 = 0 \rightarrow \vec{v} = (3, -4)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'} = (4, 3)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3, -1)$ es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (4, 3)$.

El punto $P(3, -1)$ no pertenece a la recta dada ya que $4x + 3y + 2 = 0 \xrightarrow{x=3,\, y=-1} 12 - 3 + 2 \neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x, y) = (3, -1) + t \cdot (6, -8)$.

36. **Página 169**

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{7} \rightarrow \vec{v_r} = (2, 7)$ es un vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_s} = (4, 14)$. El punto $P(0, 0)$ no pertenece a la recta dada ya que:

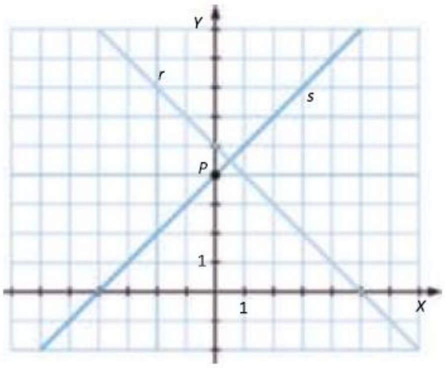
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{7} \xrightarrow{x=0,\, y=0} \frac{-1}{2} \neq \frac{-5}{7}$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (0, 0) + t \cdot (4, 14)$.

37. Página 169

$r: x+y-5=0 \rightarrow \vec{v_r}=(1,-1)$ es un vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v_s}=(1,1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(0,4)$ es: $s:(x,y)=(0,4)+t\cdot(1,1)$.



38. Página 169

$r:(x,y)=(2,0)+t(-1,4) \rightarrow \vec{v_r}=(-1,4)$ es un vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_s}=(-2,8)$. El punto $P(1,1)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{4} \xrightarrow{x=1,\,y=1} 1 \neq \frac{1}{4}$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s:(x,y)=(1,1)+t\cdot(-2,8)$.

39. Página 169

$y=\frac{3}{2}x+1 \rightarrow \vec{v}=(2,3)$ es un vector director de la recta.

a) Un vector paralelo es $\vec{v_s}=(4,6)$. El punto $P(0,2)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$y=\frac{3}{2}x+1 \xrightarrow{x=0,\,y=2} 2 \neq 1$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s:(x,y)=(0,2)+t\cdot(4,6)$.

b) Un vector perpendicular es $\vec{v_s}=(3,-2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(0,0)$ es: $s: y=\frac{-2}{3}x$.

c) Un vector paralelo es $\vec{v_s}=(4,6)$. El punto $Q(0,3)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$y=\frac{3}{2}x+1 \xrightarrow{x=0,\,y=3} 3 \neq 1$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta paralela es $s: \frac{x}{4}=\frac{y-3}{6}$.

40. Página 169

$y = 7 \rightarrow (x, y) = (0, 7) + t(1, 0)$. Para que pase por el (1, 2) la recta tiene que ser $y = 2$.

41. Página 169

La recta pasa por los puntos $A(0, 3)$ y $B(-2, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, -5) \rightarrow r : (x, y) = (0, 3) + t(-2, -5)$

a) Un vector paralelo es $\overrightarrow{v_s} = (4, 10)$. Una recta paralela que pasa por el origen es $s : (x, y) = (0, 0) + t(4, 10)$.

b) Un vector perpendicular es $\overrightarrow{v_t} = (-5, 2)$. Una recta perpendicular que pasa por $A(0, -1)$ es $t : (x, y) = (0, -1) + t(-5, 2)$.